

Projet

Dalissier Eric

1 Problème stationnaire de diffusion

Etudions le cas d'un phénomène stationnaire de diffusion modélisé par le système suivant :

$$(D) \begin{cases} -(a(x)u'(x))' = f(x), & x \in]0, 1[\\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

1.1 Exercice 1 (Formulation variationnelle du problème)

Nous avons la formulation variationnelle de (D) , qui s'écrit sous la forme :

$$(FV_D) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(0, 1) \text{ telle que, pour tout } v \in H_0^1(0, 1), \text{ on ait} \\ \int_0^1 a(x)u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f'(x)v(x)dx \end{cases}$$

Il nous faut trouver les solutions de ce problème sous l'hypothèse :

$$(H_D) \begin{cases} f(x) = 1 \\ a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \nu & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \end{cases}$$

La solution classique $u \in C^2(]0, 1[) \cap C^0([0, 1])$ vérifiant (D) n'existe pas.

Il faut pour cela passer à la formulation variationnelle FV_D . Physiquement sous H_D , on a :

$$(D_{H_D}) \begin{cases} -u''(x) = 1 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ -\nu u''(x) = 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

La première loi physique concerne la continuité en $\frac{1}{2}$. Cela se traduit par :

$$u^-\left(\frac{1}{2}\right) = u^+\left(\frac{1}{2}\right)$$

Le flux $a(x)u'(x)$ est continue en $\frac{1}{2}$ d'où :

$$(u^-)'(\frac{1}{2}) = \nu(u^+)'\frac{1}{2}$$

On a , dans (D_{H_D}) , $-u'' = 1$ et $-\nu u'' = 1$. Comme $u'' \in C^0([0, 1])$, on intègre 2 fois u'' pour avoir la forme générale de u . Ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour } x \in]0, \frac{1}{2}[\\ -(u^-)'(x) = x + C_1 \\ -u^-(x) = \frac{x^2}{2} C_1 x + C_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{pour } x \in]\frac{1}{2}, 1[\\ -(u^-)'(x) = \frac{x}{\nu} + C_3 \\ -u^-(x) = \frac{x^2}{2\nu} C_3 x + C_4 \end{array}$$

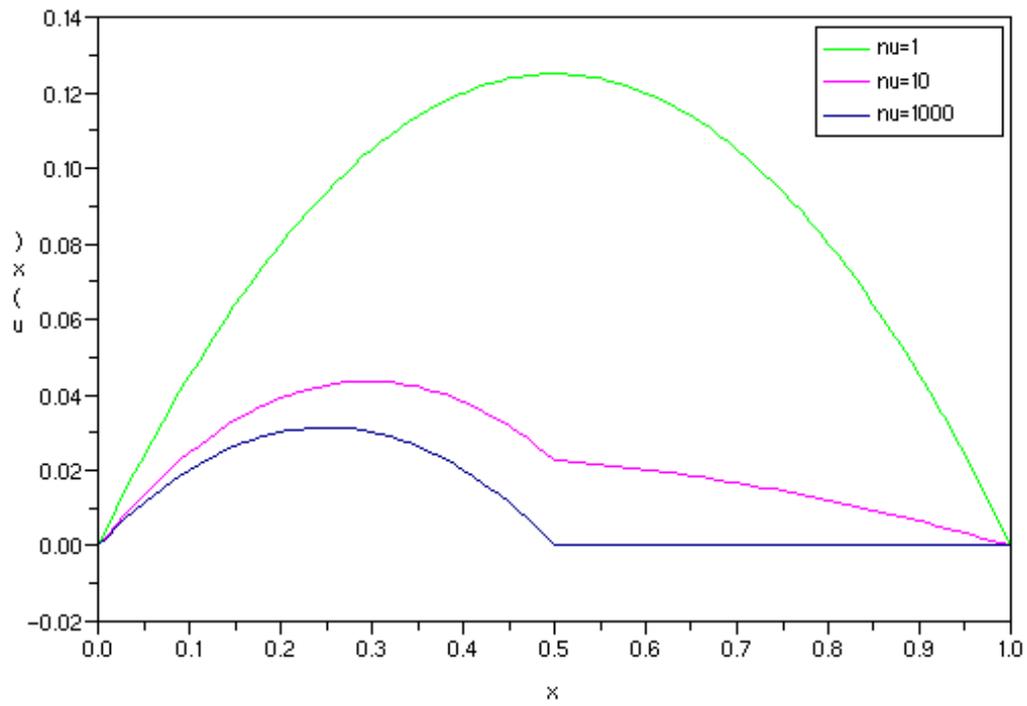
Avec C_1, C_2, C_3, C_4 des constantes réelles.

On a ainsi en $\frac{1}{2}$ un système à 4 équation et à 4 inconnues. Il existe donc une unique solution à ce système. Après calcul, on a :

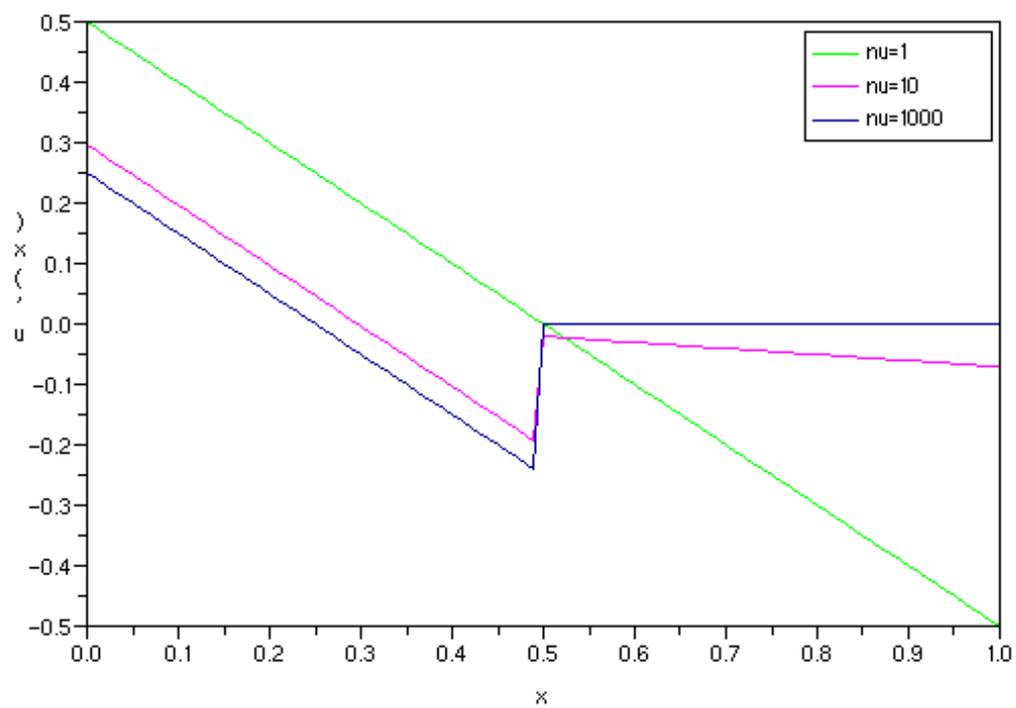
$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{-3 - \nu}{4\nu(\nu + 1)} \\ C_2 = 0 \\ C_3 = \frac{-3 - \nu}{4\nu(\nu + 1)} \\ C_4 = \frac{1 - \nu}{4\nu(\nu + 1)} \end{array} \right.$$

On s est servi de *scilab* pour représenter la fonction u pour différents ν .

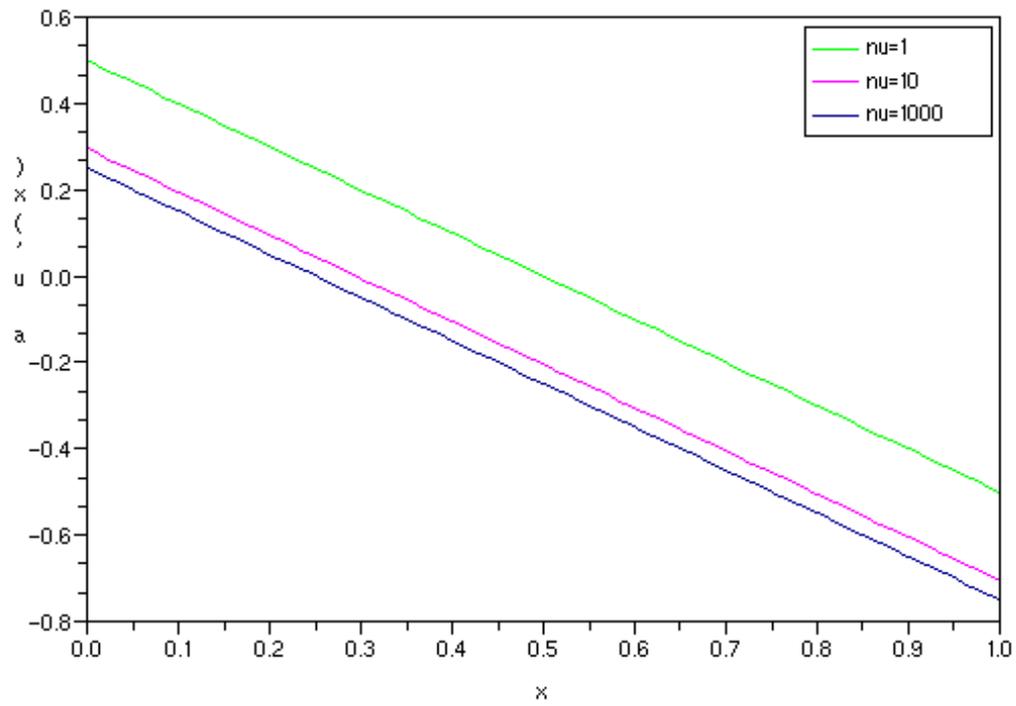
La solution exacte $u(x)$ sur $[0, 1]$:



La dérivée de la solution exacte $u'(x)$ sur $[0, 1]$:



La dérivée de la solution exacte multiplié par un scalaire a , $au'(x)$, sur $[0, 1]$:



On constate que pour $u'(x)$, sous (H_D) , nous avons une discontinuité en $x = \frac{1}{2}$.

On peut donc déterminer à quels espaces fonctionnels, ils appartiennent :

$$\begin{aligned} u(x) &\in C^1(0, 1) \text{ si } \nu = 1 \text{ et } H^1 \text{ sinon} \\ u'(x) &\in C^0(0, 1) \text{ si } \nu = 1 \text{ et } H^1 \text{ sinon} \\ au'(x) &\in C^0(0, 1) \forall \nu \end{aligned}$$

1.2 Exercice 2 (Discrétisation par les éléments finis)

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $h = 1/(N + 1)$, défnit les points $x_k = kh$, $k = 0, \dots, N + 1$, de telle sorte que $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$ et les intervalles $I_k =]x_k, x_{k+1}[$, $k = 0, \dots, N$. On note $\mathbb{P}_1(I_k)$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 sur I_k et

$$\mathcal{V}_1^h = \left\{ v_h \in C^0[0, 1], \quad v_h|_{I_k} \in \mathbb{P}_1(I_k), \quad v_h(0) = v_h(1) = 0 \right\}.$$

Nous allons montrer que les $\varphi_{h,k}$ forme une base hilbertienne de dimension fini de \mathcal{V}_1^h donc une base :

On montre que : $\sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_{h,k}(x_j) = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0 \quad \forall k$

pour $j=1 \Rightarrow \lambda_j = 0$

⋮

pour $j=N \Rightarrow \lambda_N = 0$

D'où $\varphi_{h,k}(x_j) = \delta_{j,k}$ est une famille totale dans \mathcal{V}_1^h

On montre que la famille est orthonormé :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{h,k}, \varphi_{h,j} \rangle &= 1 \text{ si } k = j \\ &= 0 \text{ si } j \neq k \end{aligned}$$

Comme j est fini dénombrable et \mathcal{V}_1^h est séparable car \mathcal{V}_1^h est l'ensemble des fonctions globalement continues affine par morceaux.

Il reste à montrer que la famille est génératrice :

$$\forall x \in \mathcal{V}_1^h \exists (\lambda_1 \dots \lambda_N) \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_{h,k}(x_j)$$

Or tout polynome de degré inférieur ou égale à 1 sur I_k au point x_j vaut une constante réelle ou nulle λ_j . Donc la famille des fonctions $\varphi_{h,k}$ est génératrice dans \mathcal{V}_1^h .

La famille des fonctions $\varphi_{h,k}$ forme une base de \mathcal{V}_1^h .

On cherche maintenant une approximation $u_h \in \mathcal{V}_1^h$ de la fonction u . On a le système des éléments finis suivant :

$$(EF_D) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in \mathcal{V}_1^h \text{ telle que, pour tout } v_h \in \mathcal{V}_1^h, \text{ on ait} \\ \int_0^1 a(x) u_h'(x) v_h'(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx. \end{array} \right.$$

En reprenant (D), puis en la multipliant par $v_h \in \mathcal{V}_1^h$ puis en intégrant sur $[0,1]$, on obtient :

$$- \int_0^1 (a(x) u_h'(x))' v_h(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx$$

Intégrons maintenant par partie le membre de gauche :

$$- [a(x) u_h'(x) v_h(x)]_0^1 + \int_0^1 a(x) u_h'(x) (v_h)'(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx$$

Or $v_h \in \mathcal{V}_1^h$, donc $[a(x)u'(x)v_h(x)]_0^1=0$ car $v_h(0)=v_h(1)=0$. On retrouve ainsi le système des éléments finis (EF_D) de (D).

On écrit u_h dans la base des $\varphi_{h,k}$: $u_h = \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_{h,k}$. Comme $\varphi_{h,k} = \delta_{j,k}$, on a donc :

$$\begin{aligned} u_h(x_k) &= \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_{h,k}(x_k) \\ &= 0 * \alpha_1 + \dots + 1 * \alpha_k + 0 * \alpha_{k+1} + \dots + 0 * \alpha_N \\ &= \alpha_k \end{aligned}$$

Ensuite on remplace v_h par $u(x_l) * \varphi_{h,l}(x)$ car le système est valable pour tout $v_h \in \mathcal{V}_1^h$. On a donc :

$$\begin{aligned} - \int_0^1 a(x) \sum_{k=1}^N (\alpha_k)' \varphi_{h,k}(x_k) (u(x_l) \varphi_{h,l}(x))' dx \\ - \int_0^1 a(x) \sum_{k=1}^N \alpha_k (\varphi_{h,k}(x_k))' (u(x_l) \varphi_{h,l}(x))' dx = \int_0^1 f(x) u(x_l) \varphi_{h,l}(x) dx \end{aligned}$$

Or α_k est une constante, donc sa dérivée est nulle.

Puis comme $(\varphi_{h,k}(x))'$ n'est différent de 0 que sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_{k+1}]$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{x_{k-1}}^{x_k} a(x) u(x_k) \frac{1}{h} u(x_k) \frac{1}{h} dx + \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} a(x) u(x_k) \left(-\frac{1}{h}\right) u(x_k) \left(-\frac{1}{h}\right) dx + \\ \int_{x_{k-1}}^{x_k} a(x) u(x_{k-1}) \left(-\frac{1}{h}\right) u(x_k) \frac{1}{h} dx + \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} a(x) u(x_{k+1}) \frac{1}{h} u(x_k) \left(-\frac{1}{h}\right) dx \\ = \int_0^1 f(x) u(x_k) \varphi_{h,k}(x) \end{aligned}$$

On peut simplifier par $u(x_k)$ (il servait juste à indiquer le sommet de la fonction chapeau utilisé). On va ensuite pour résoudre numériquement le problème, le mettre sous forme de matrice de la forme $A_h \tilde{u}_h = b_h$.

Mis sous forme matricielle, on aura :

$$A_h = \begin{pmatrix} \int_{x_0}^{x_2} a(x) \frac{1}{h^2} dx & - \int_{x_1}^{x_2} a(x) \frac{1}{h^2} dx & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 \dots & - \int_{x_{k-1}}^{x_k} a(x) \frac{1}{h^2} dx & \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} a(x) \frac{1}{h^2} dx & - \int_{x_k}^{x_{k+1}} a(x) \frac{1}{h^2} dx & 0 \dots 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 \dots & - \int_{x_{N-1}}^{x_N} a(x) \frac{1}{h^2} dx & \int_{x_{N-1}}^{x_{N+1}} a(x) \frac{1}{h^2} dx & & \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_h = \begin{pmatrix} u_h(x_1) \\ \vdots \\ u_h(x_N) \end{pmatrix}$$

Enfin pour trouver b_h , on utilise la méthode des trapèzes :

$$\begin{aligned} \int_1^0 f(x)\varphi_{h,k}(x_k)dx &= \int_{x_{k+1}}^{x_{k-1}} f(x)\varphi_{h,k}(x_k)dx \\ &= \int_{x_k}^{x_{k-1}} f(x)\varphi_{h,k}(x_k)dx + \int_{x_{k+1}}^{x_k} f(x)\varphi_{h,k}(x_k)dx \\ (\text{par la méthode des trapèzes}) &= \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2} f(x_k)\right) + \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2} f(x_k)\right) \\ &= hf(x_k) \end{aligned}$$

Maintenant montrons que A_h est symétrique, définie positive et inversible.

Mais avant on va exprimer A_h de manière plus simple en mettant en facteur $\frac{1}{h^2}$:

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} \int_{x_0}^{x_2} 2a(x) & -\int_{x_1}^{x_2} a(x) & 0 & 0 & \dots \\ -\int_{x_{k-1}}^{x_k} a(x) & \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} 2a(x) & -\int_{x_k}^{x_{k+2}} a(x) & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & -\int_{x_{N-1}}^{x_N} a(x) & 2\int_{x_{N-1}}^{x_{N+1}} a(x) \end{pmatrix}$$

- A_h est symétrique car $A_h = A_h^t$

- A_h est définie positive car $\forall V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$, on a :

$$A_h V = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} \int_{x_0}^{x_2} 2a(x)v_1 - \int_{x_1}^{x_2} a(x)v_2 \\ -\int_{x_1}^{x_2} a(x)v_1 + \int_{x_0}^{x_2} 2a(x)v_2 - \int_{x_1}^{x_2} a(x)v_3 \\ \vdots \\ \int_{x_{N-1}}^{x_N} 2a(x)v_{N-1} - \int_{x_{N-1}}^{x_{N+1}} a(x)v_N \end{pmatrix}$$

Or $a(x)$ est une constante positive sur $[0, \frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Donc le signe de $A_h V$ ne dépend que du signe de $-v_{k-1} + 2v_k - v_{k+1}$ et $2v_1 - v_2, 2v_N - v_{N-1}$. Si $A_h V \geq 0$ alors on aura $2v_1 - v_2 \geq 0 \Rightarrow -v_1 + 2v_2 - v_3 \geq 0$ devient $3v_1 - v_3 \geq 0$ et ainsi de suite jusqu'à $2v_N - v_{N-1} \geq 0$

On a alors $V \geq 0$.

D'où A_h est définie positive.

- A_h est inversible, pour cela on utilise la proposition du cours suivante :

Si la fonction c est positive et si $\sup_{x \in [0,1]} |b(x)| < \frac{1}{2}$ Alors la matrice A_N est inversible.

ici $b(x)=0$ et c aussi. Donc A_h est inversible

1.3 Exercice 3 (Calcul numérique de la solution approchée, convergence)

On suppose ici que l'hypothèse (H_D) est vérifié. Avant de programmer CalculMatD, nous avons programmé la fonction forma(a,b) qui calcule $\int_a^b a(x)dx$ selon les différentes valeurs de $a(x)$.

Puis on a programmé la fonction CalculMatD qui nous rend la matrice A_h .

On a

$$b_h = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(x)\varphi(h,1)dx \\ \vdots \\ \int_0^1 f(x)\varphi(h,n)dx \end{pmatrix}$$

Pour calculer $\int_0^1 f(x)\varphi(h,i)dx$, on utilise la formule d'intégration des trapèzes.

$$\int_0^1 f(x)\varphi(h,i)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi(h,i)dx.$$

Comme $\varphi(h,i) = 0$ si $x \in [x_0, x_{i-1}] \cup [x_{i+1}, x_{n+1}]$

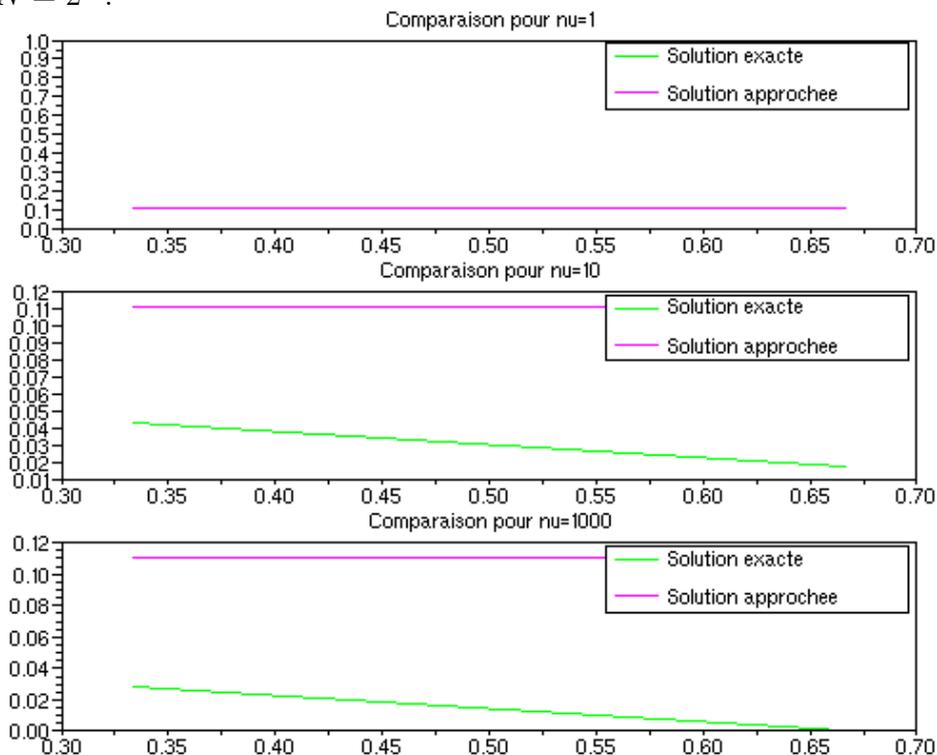
On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\varphi(h,i)dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi(h,i)dx \\ &= \frac{h}{2}f(x_{i-1}) + \frac{h}{2}f(x_i) \\ &= hf(x_i) \end{aligned}$$

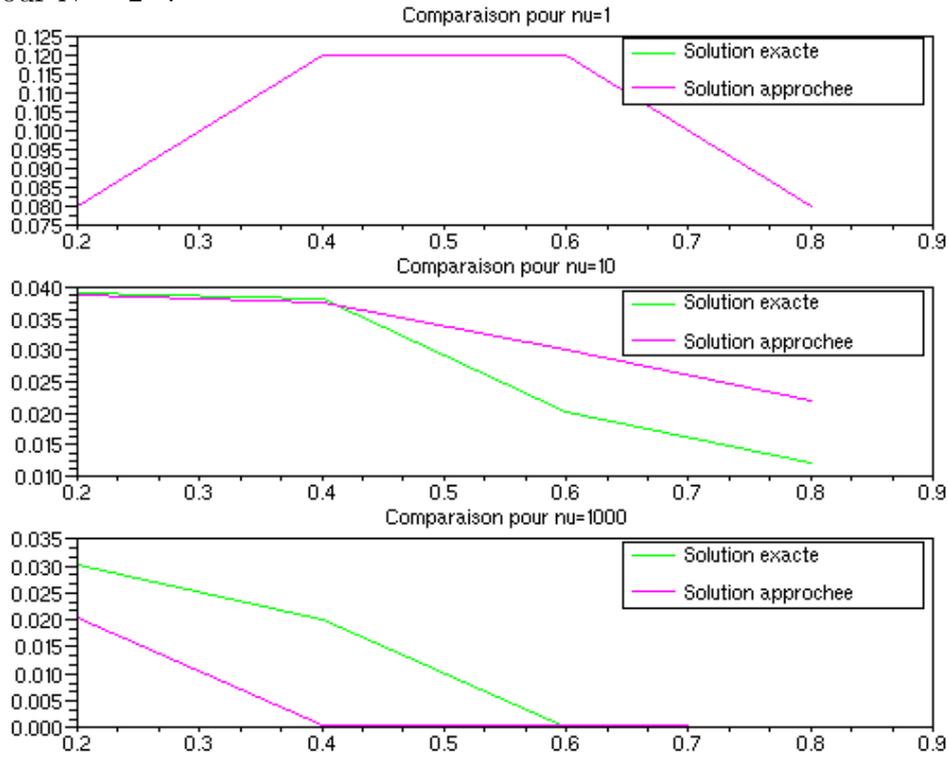
On a le programme CalculSMD qui nous calcule le vecteur b_h .

Pour différentes valeurs de ν et de N , on a comparé graphiquement la solution exacte et la solution approchée.

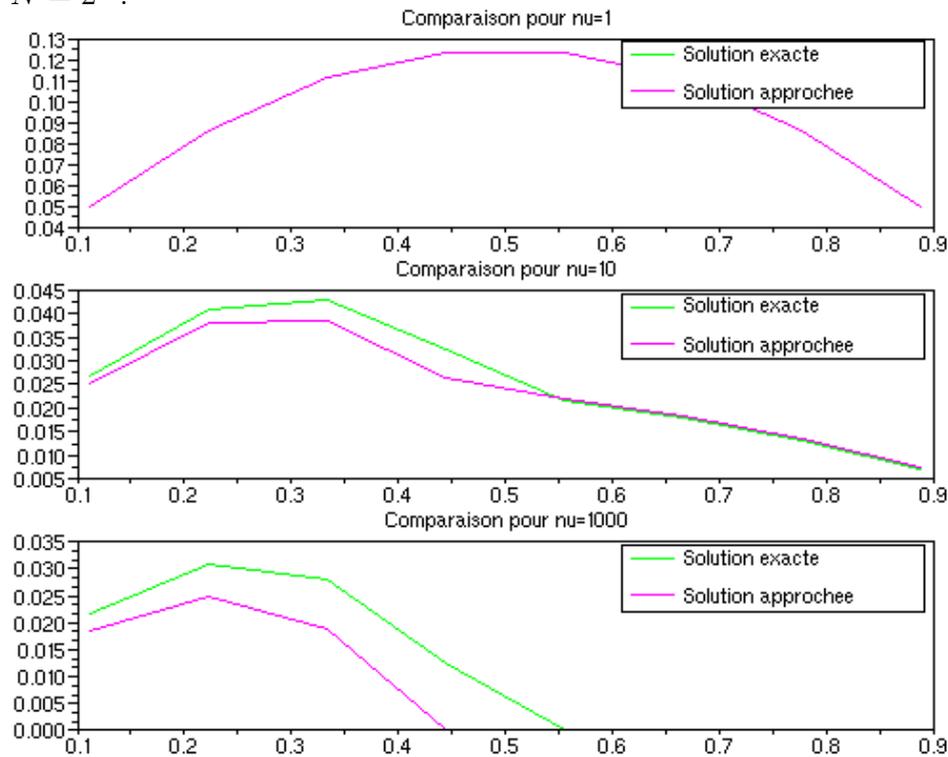
Pour $N = 2^1$:



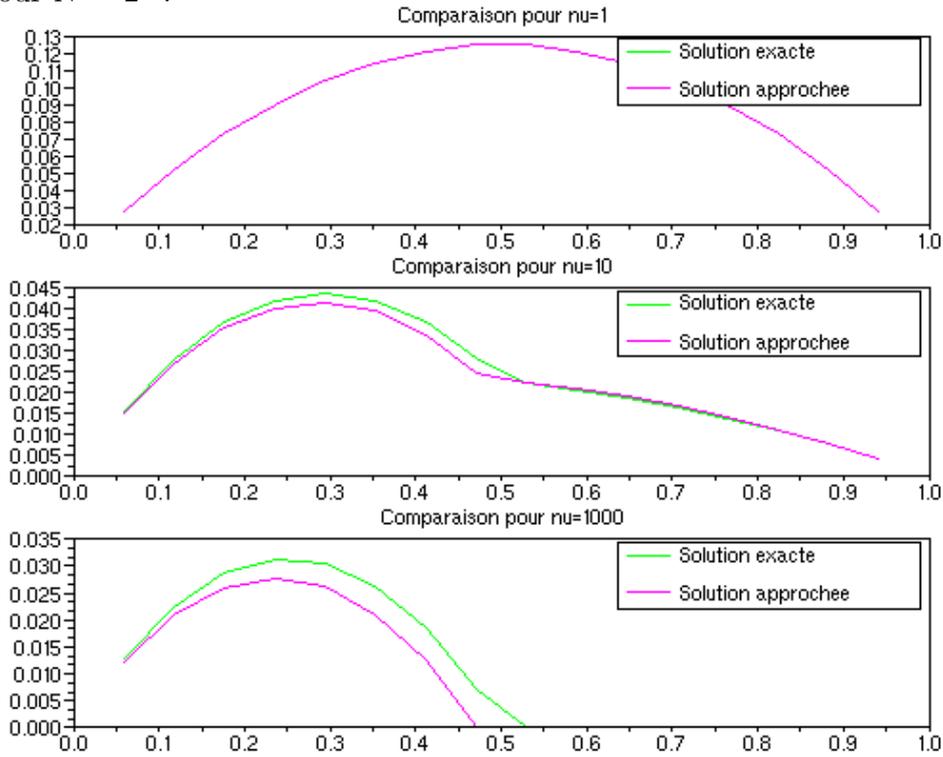
Pour $N = 2^2$:



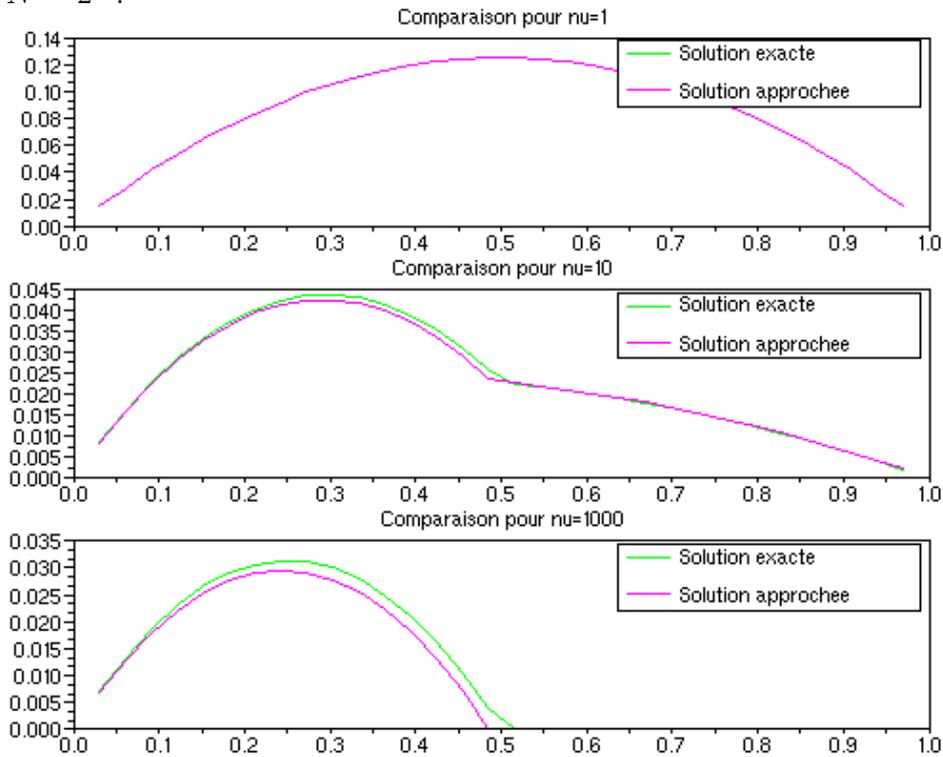
Pour $N = 2^3$:



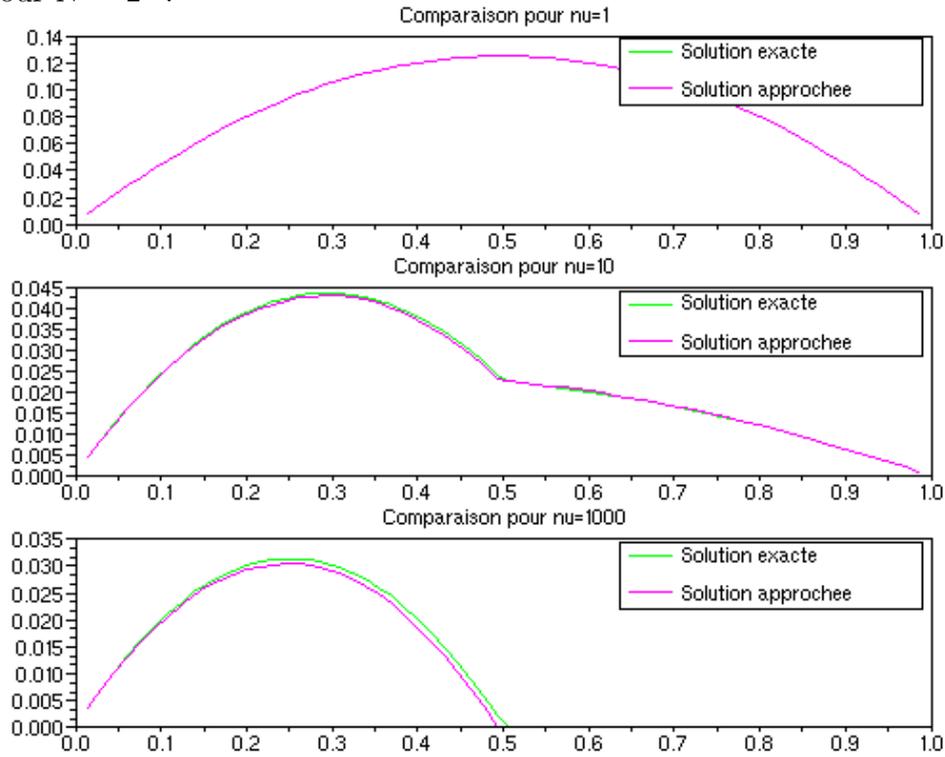
Pour $N = 2^4$:



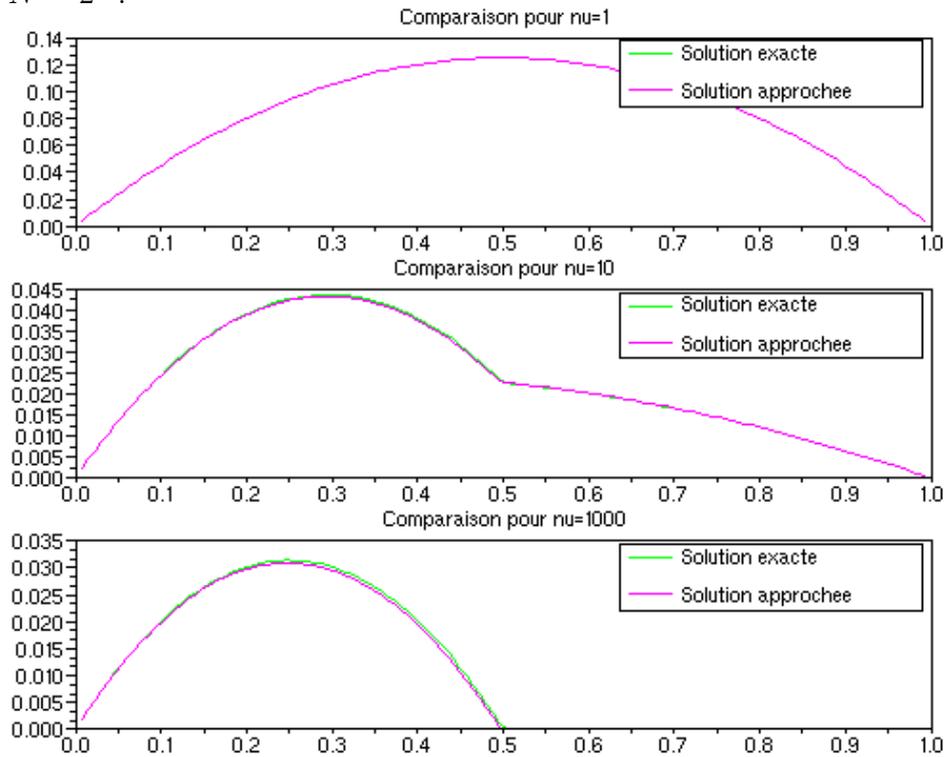
Pour $N = 2^5$:



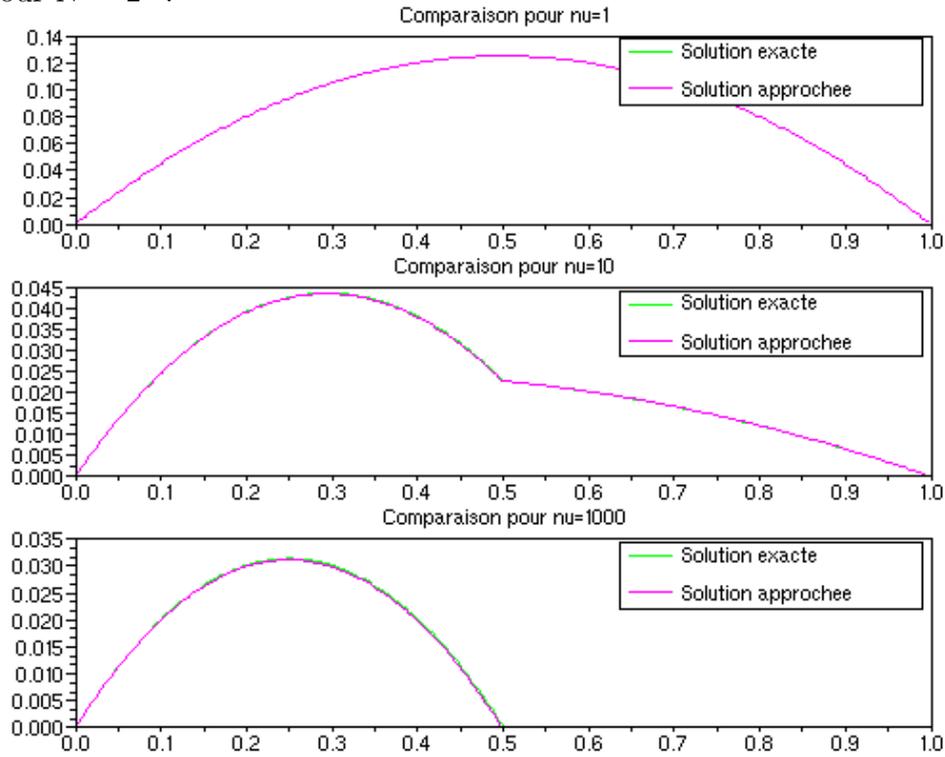
Pour $N = 2^6$:



Pour $N = 2^7$:



Pour $N = 2^8$:

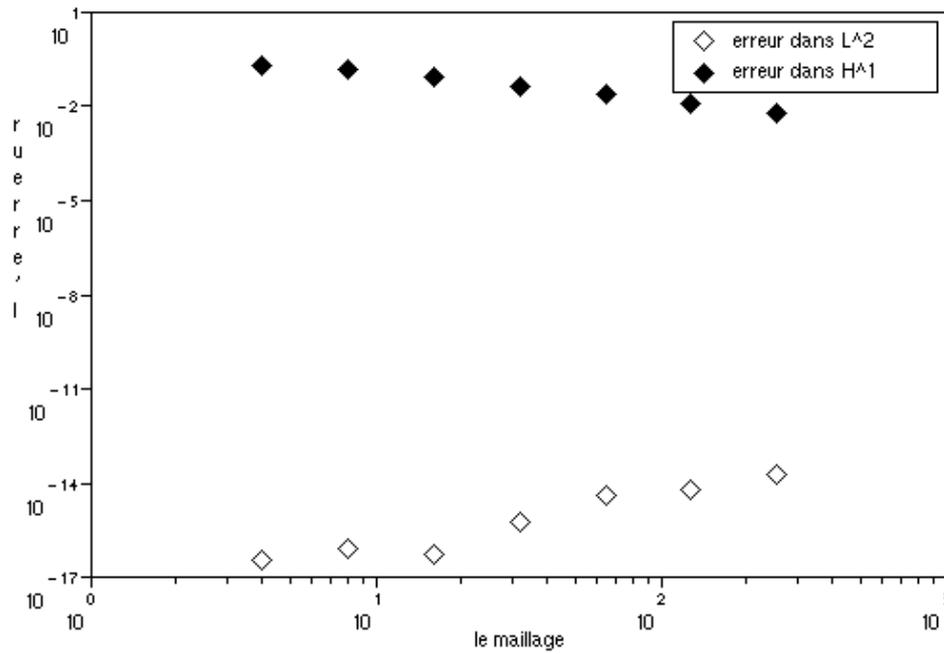


Pour $\nu = 1$, la solution approchée est la même que la solution exacte. Pour $\nu = 10$ ou 1000 et pour des N petits ($2, 2^2$), la solution approchée diffère de la solution exacte. Ceci est la conséquence de la discontinuité que $a(x)$ entraîne en $\frac{1}{2}$.

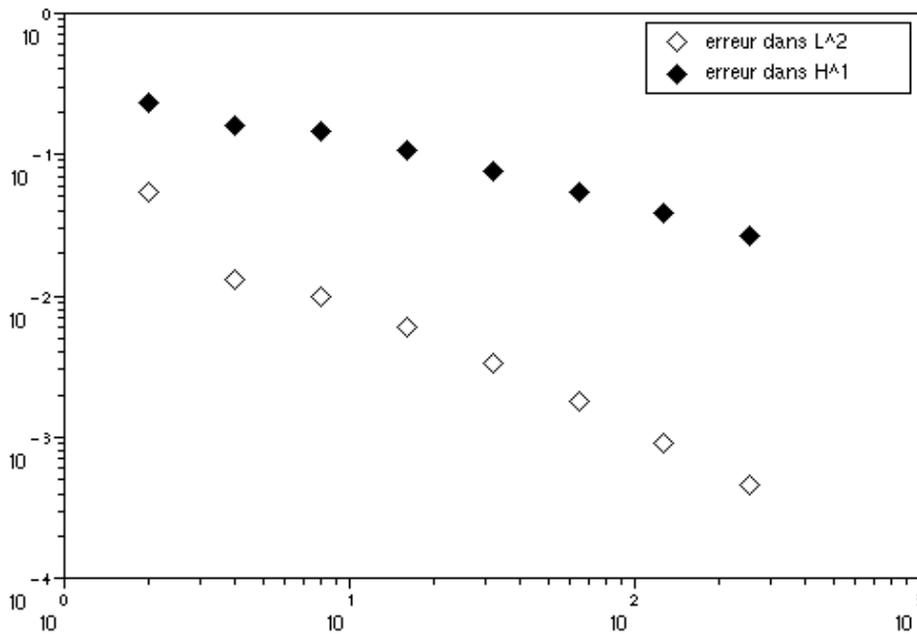
Ensuite nous avons étudié la convergence de la méthode des éléments finis pour le problème (D). Pour cela nous avons programmé l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée pour les normes L^2 et H^1 . Puis pour différents $\nu=1, 10, 1000$, nous avons tracé cette erreur les mmes pas de temps que ceux utilisés précédemment, le tout dans un repère logarithmique.

On obtient :

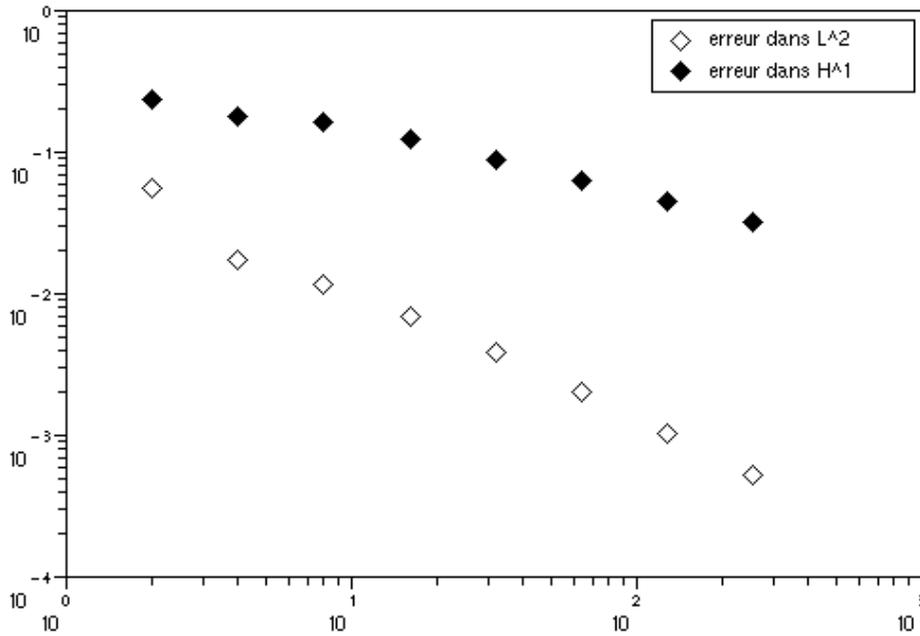
Erreur du schéma numerique pour nu=10 en repere logarithmique



decroissance de l'erreur pour nu=10



decroissance de l'erreur pour nu=1000



Les courbes obtenues étant presque des droites, on peut déterminer leur pente, et ainsi avoir une majoration de l'erreur à une constante près.

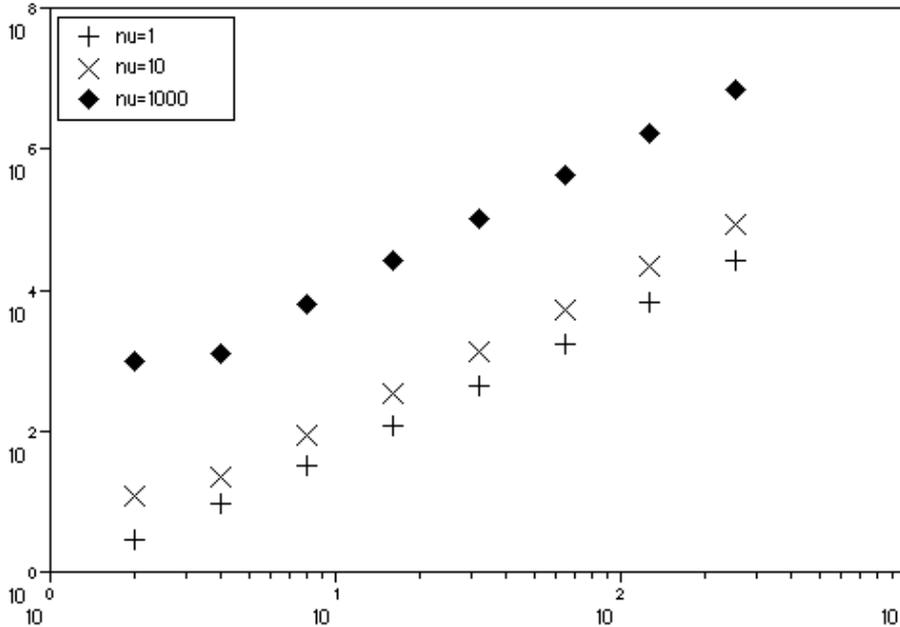
| | $\nu = 1$ | $\nu = 10$ | $\nu = 1000$ |
|-------|-----------|------------|--------------|
| p_0 | 0.87 | 0.88 | 0.90 |
| p_1 | 0.51 | 0.48 | 0.47 |

On peut donc dire que l'erreur ne varie pas en fonction de ν , ou tout du moins pas de manière significative. On a ainsi les majorations suivantes, en utilisant le résultat du cours :

$$\| u_h - u \|_0 \leq C_1 h^1, \quad \| u_h - u \|_1 \leq C_2 h^{0.5}$$

1.4 Exercice 4 (Conditionnement de la matrice A_h)

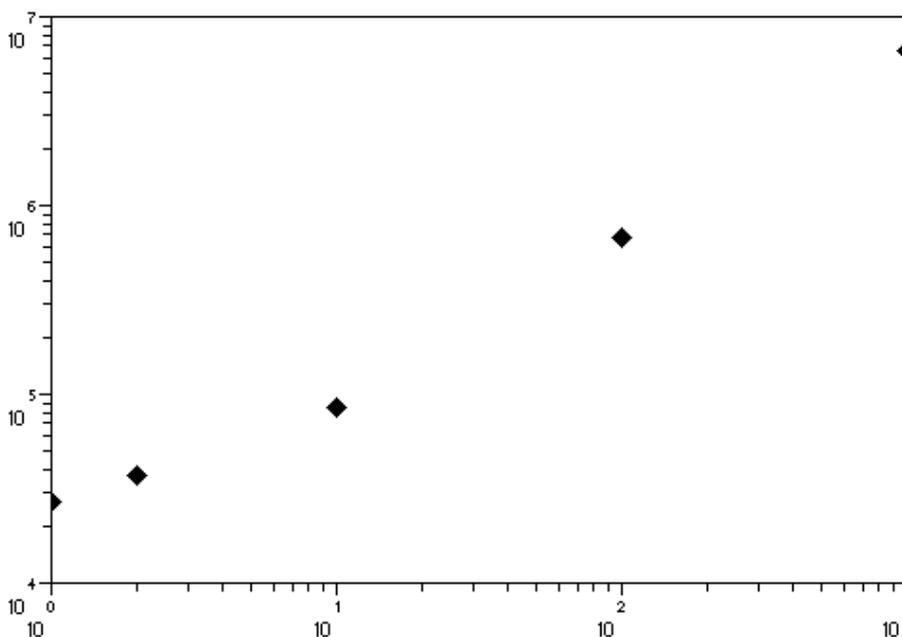
On a représenté graphiquement le conditionnement de A_h pour différents pas(les mêmes que ceux utilisés dans l'exercice 3). On obtient le graphique suivant :



La pente est de 1.9401742, ce qui est cohérent, car on obtient le même ordre de grandeur que dans le tp2 mais pour un n différent. Plus nu est élevé et plus le conditionnement de A_h est grand, et donc l'erreur est grande. Car on a vu en cours que l'erreur de convergence peut être majorée par le conditionnement de la matrice A .

On trace le conditionnement de A_h avec $N=2^8$, en fonction de $\nu=1, 2, 10, 100, 1000$.

Le conditionnement de A_h en fonction de ν



La pente de ce dernier graphique est $1.1283244 \approx 1$.
Or plus le conditionnement de la matrice est élevé et plus l'erreur sera importante. Donc pour ne pas avoir une erreur trop importante, il faut prendre un ν petit, et un pas petit lui aussi.

1.5 Exercice 6 (Formulation variationnelle du problème (CD))

$$(CD) \begin{cases} -\varepsilon u''(x) + \lambda u'(x) &= f(x), \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0. \end{cases}$$

Tout comme pour le problème de diffusion, une solution régulière u (dans $H_0^2(0,1)$) du problème aux limites (CD) est aussi solution du problème suivant :

$$(FV_{CD}) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(0,1) \text{ telle que, pour tout } v \in H_0^1(0,1), \text{ on ait} \\ \varepsilon \int_0^1 u'(x)v'(x)dx - \lambda \int_0^1 u(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \end{cases}$$

On pose $f(x)=c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Résolvons maintenant le système (CD) sous cette hypothèse.

Recherche de la solution exacte :

– Solution homogène :

La solution est de la forme $u(x) = e^{Ax}$ avec $A \in \mathbb{R}$ une constante.

On remplace donc dans l'équation homogène et on simplifie par e^{Ax} car $e^{Ax} > 0$, on a alors :

$$A(-\varepsilon A + \lambda) = 0$$

D'où la solution de l'équation homogène est : $u(x) = A_0 e^{\frac{\lambda}{\varepsilon}x} + A_1$ avec A_0 et A_1 des constantes.

– Solution particulière :

On remarque que la solution $u(x) = \frac{f(x)}{\lambda}x$ convient.

– Détermination des constantes :

La solution exacte est : $u(x) = A_0 e^{\frac{\lambda}{\varepsilon}x} + A_1 + \frac{f(x)}{\lambda}x$

Les conditions aux limites entraînent :

$$u(0) = 0 \Rightarrow A_0 + A_1 = 0 \Rightarrow A_0 = -A_1$$

$$u(1) = 0 \Rightarrow A_0 e^{\frac{\lambda}{\varepsilon}} - A_0 + \frac{f(1)}{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow A_0 = -\frac{f(1)}{\lambda(e^{\frac{\lambda}{\varepsilon}} - 1)}$$

La solution exacte s'écrit donc :

$$u(x) = -\frac{c}{\lambda(e^{\frac{\lambda}{\varepsilon}} - 1)}(e^{\frac{\lambda}{\varepsilon}x} - 1) + \frac{c}{\lambda}x$$

Ensuite nous allons étudier les variations de $u(x)$ entre $]0,1[$. On pose d'abord $\theta = \frac{\lambda}{\varepsilon}$. Ensuite on calcule la dérivée de $u(x)$:

$$u'(x) = \frac{c}{\lambda} + \frac{\theta c e^{\theta x}}{\lambda(e^\theta - 1)}$$

| | | | |
|---------|---|---------------|---|
| | 0 | x_θ | 1 |
| $u'(x)$ | + | ○ | - |
| $u(x)$ | 0 | $u(x_\theta)$ | 0 |

Les conditions aux limites imposent que $\theta \neq 0$ car sinon $u'(x) = \text{constante}$, et ainsi $u(x) = 0 \forall x$ et donc $\frac{\lambda}{c} = 0$. L'exponentiel étant une fonction strictement croissante et positive, la variation de $u(x)$ dépend donc du terme $\frac{\theta c}{\lambda(e^\theta - 1)}$.

Or $e^\theta - 1 < 0$ quand $\theta < 0$, or dans ce cas là on aura $\theta c < 0$. Donc $\frac{\theta c}{\lambda(e^\theta - 1)} > 0$. Dans l'autre cas toutes les variables sont positives, donc on a bien le résultat énoncé dans le tableau de variation.

On a :

$$x_\theta = \frac{1}{\theta} \ln\left(\frac{1 - e^\theta}{\theta}\right)$$

On calcule ensuite la limite de x_θ quand θ tend vers l'infini.

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} x_\theta = 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} x_\theta = 0$$

Prouvons le pour le cas où $\theta \rightarrow -\infty$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{1}{\theta} \ln\left(\frac{1 - e^\theta}{\theta}\right) &= \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \left(\frac{\theta + 1 - e^\theta}{\theta}\right)\right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{1}{\theta} \frac{\theta + 1 - e^\theta}{\theta} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pour le cas où $\theta \rightarrow +\infty$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\theta} \ln\left(\frac{1 - e^\theta}{\theta}\right) &= \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\theta} \ln\left(e^\theta \left(\frac{e^{-\theta} - 1}{\theta}\right)\right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \left(\frac{e^{-\theta} - 1 - \theta}{\theta}\right)\right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\theta} - 1 - \theta}{\theta} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On fixe maintenant $\lambda > 0$, et on étudie le comportement de la solution u quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$.
On a :

$$u(x_\theta) = -\frac{c}{\lambda\theta} \left(1 + \frac{\theta}{1 - e^\theta} + \ln\left(\frac{1 - e^\theta}{\theta}\right)\right)$$

On cherche maintenant la limite de $u(x_\theta)$:

$$\lim_{\varepsilon^+ \rightarrow 0^+} u(x_\theta) = \lim_{\varepsilon^+ \rightarrow 0^+} \frac{c(e^\theta - 2)}{\lambda\theta(1 - e^\theta)} = +\infty$$

Comparons maintenant $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 1} u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(x)$.

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 1} u(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{c}{\lambda} x = \frac{c}{\lambda} \\ \text{car } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\frac{c(e^{\frac{\lambda}{\varepsilon}x} - 1)}{\lambda(e^{\frac{\lambda}{\varepsilon}} - 1)} &= 0 \quad \forall x \in]0, 1[\end{aligned}$$

Pour ε petit, la solution du problème différentiel (CD) tend vers $\frac{c}{\lambda} \neq 0$ quand $x \rightarrow 1$.

Or la fonction $u(x)$ est $C^2([0, 1])$, donc les limites extérieures et intérieures de la fonction doivent être égales, mais on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 1} u(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(x)$.

Il existe donc une couche limite au point $x=1$ où c'est deux solutions se rejoignent. On pourra utiliser une méthode asymptotique raccordée pour déterminer $u(x)$.

1.6 Exercice 7 (Discrétisation par les éléments finis)

On cherche une approximation $u_h \in \mathcal{V}_1^h$ de la fonction u , solution du problème suivant (comparer avec (FV_{CD}))

$$(EF_{CD}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in \mathcal{V}_1^h \text{ telle que, pour tout } v_h \in \mathcal{V}_1^h, \text{ on ait} \\ \varepsilon \int_0^1 u'_h(x)v'_h(x)dx - \lambda \int_0^1 u_h(x)v'_h(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx. \end{array} \right.$$

En reprenant (CD) , puis en la multipliant par $v_h \in \mathcal{V}_1^h$ puis en intégrant sur $[0,1]$, on obtient :

$$-\int_0^1 -\varepsilon u''(x)v_h(x) + \lambda u'(x)v_h(x)dx = \int_0^1 -\varepsilon f(x)v_h(x)dx$$

Intégrons maintenant par partie le membre de gauche :

$$-[\varepsilon u'(x)v_h(x)]_0^1 + \int_0^1 \varepsilon u'(x)v'_h(x)dx + [\lambda u(x)v_h(x)]_0^1 - \lambda \int_0^1 u_h(x)v'_h(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx$$

Or $v_h \in \mathcal{V}_1^h$, donc $[\varepsilon u'(x)v_h(x)]_0^1=0$ et $[\lambda u(x)v_h(x)]_0^1=0$ car $v_h(0)=v_h(1)=0$.
On retrouve ainsi le système des éléments finis (EF_{CD}) de (CD) .

On va écrire maintenant le problème (EF_{CD}) , dans la base des $\varphi_{h,k}$: $u_h = \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \varphi_{h,k}$

avec $\varepsilon_k = u_h(x_k)$

Or comme (EF_{CD}) est valable pour tout $v_h \in \mathcal{V}_1^h$, il reste valable pour $v_h = \varepsilon_l \varphi_{h,l}$.

Rappelons les différentes valeurs que prend $\varphi_{h,k}$:

$$\varphi_{h,k} = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}}{h} & \text{sur } [x_{k-1}, x_k] \\ \frac{x_{k+1} - x}{h} & \text{sur } [x_k, x_{k+1}] \end{cases}$$

$$\varphi'_{h,k} = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{sur } [x_{k-1}, x_k] \\ -\frac{1}{h} & \text{sur } [x_k, x_{k+1}] \end{cases}$$

Le problème s'écrit donc ainsi :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon_k \frac{1}{h} \varepsilon_k \frac{1}{h} dx + \varepsilon \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varepsilon_k \left(-\frac{1}{h}\right) \varepsilon_k \left(-\frac{1}{h}\right) dx + \\ & \varepsilon \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon_k \frac{1}{h} \varepsilon_{k-1} \left(-\frac{1}{h}\right) dx + \varepsilon \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varepsilon_k \left(-\frac{1}{h}\right) \varepsilon_{k+1} \frac{1}{h} dx + \\ & -\lambda \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon_k \left(\frac{x - x_{k-1}}{h}\right) \varepsilon_k \frac{1}{h} dx - \lambda \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varepsilon_k \left(\frac{x_{k+1} - x}{h}\right) \varepsilon_k \left(-\frac{1}{h}\right) dx \\ & -\lambda \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon_k \left(\frac{x_{k+1} - x}{h}\right) \varepsilon_{k-1} \frac{1}{h} dx - \lambda \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varepsilon_k \left(\frac{x - x_{k-1}}{h}\right) \varepsilon_{k+1} \left(-\frac{1}{h}\right) dx \\ & = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x) \varepsilon_k \varphi_{h,k} \end{aligned}$$

Simplifions par ε_k qui ne servait que de témoin pour l'écrire dans cette base. Mettons ce système linéaire sous la forme matricielle $A_h \tilde{u}_h = b_h$. D'où

$$A_h = \begin{pmatrix} \varepsilon \int_{x_0}^{x_2} \frac{1}{h^2} dx - \lambda \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{x-x_0}{h} \right) \frac{1}{h} dx - \lambda \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{2x-x}{h} \right) \frac{1}{h} dx & -\varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{h^2} dx + \lambda \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{x-x_0}{h} \right) \frac{1}{h} dx & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 - \varepsilon \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{h^2} dx + \lambda \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\frac{x_{k+1}-x}{h} \right) \frac{1}{h} dx & \varepsilon \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \frac{1}{h^2} dx - \lambda \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\frac{x-x_{k-1}}{h} \right) \frac{1}{h} dx - \lambda \int_{x_{k+1}}^{x_{k+1}-x} \left(\frac{2x_{k+1}-x}{h} \right) \frac{1}{h} dx & -\varepsilon \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{h^2} dx + \lambda \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{x-x_{k-1}}{h} \right) \frac{1}{h} dx & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\varepsilon \int_{x_{N-1}}^{x_N} \frac{1}{h^2} dx + \lambda \int_{x_{N-1}}^{x_N} \left(\frac{x_{N+1}-x}{h} \right) \frac{1}{h} dx & \varepsilon \int_{x_{N-1}}^{x_{n+1}} \frac{1}{h^2} dx - \lambda \int_{x_{N-1}}^{x_N} \left(\frac{x-x_{N-1}}{h} \right) \frac{1}{h} dx - \lambda \int_{x_N}^{x_{N+1}} \left(\frac{x_{N+1}-x}{h} \right) \frac{1}{h} dx & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant les intégrales :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\frac{x - x_{k-1}}{h}\right) \frac{1}{h} dx = \frac{1}{h^2} \{ [\frac{1}{2}x^2]_{x_{k-1}}^{x_k} - h(k-1)h \}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{x_{k+1} - x}{h}\right) \frac{1}{h} dx = \frac{1}{h^2} \{ h(k+1)h - [\frac{1}{2}x^2]_{x_k}^{x_{k+1}} \}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Ainsi on trouve la décomposition de $A_h = \varepsilon B_h + \lambda C_h$. Avec :

$$A_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon + \frac{1}{2}\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon - \frac{1}{2}\lambda & \varepsilon & -\varepsilon + \frac{1}{2}\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon - \frac{1}{2}\lambda & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$B_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_h = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule $\forall x \in \mathbb{R}^N, \langle C_h x, x \rangle$:

Tout d'abord calculons $C_h x$:

$$C_h x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{1}{2}x \end{pmatrix}$$

D'où $\langle C_h x, x \rangle = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = 0$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}^N$:

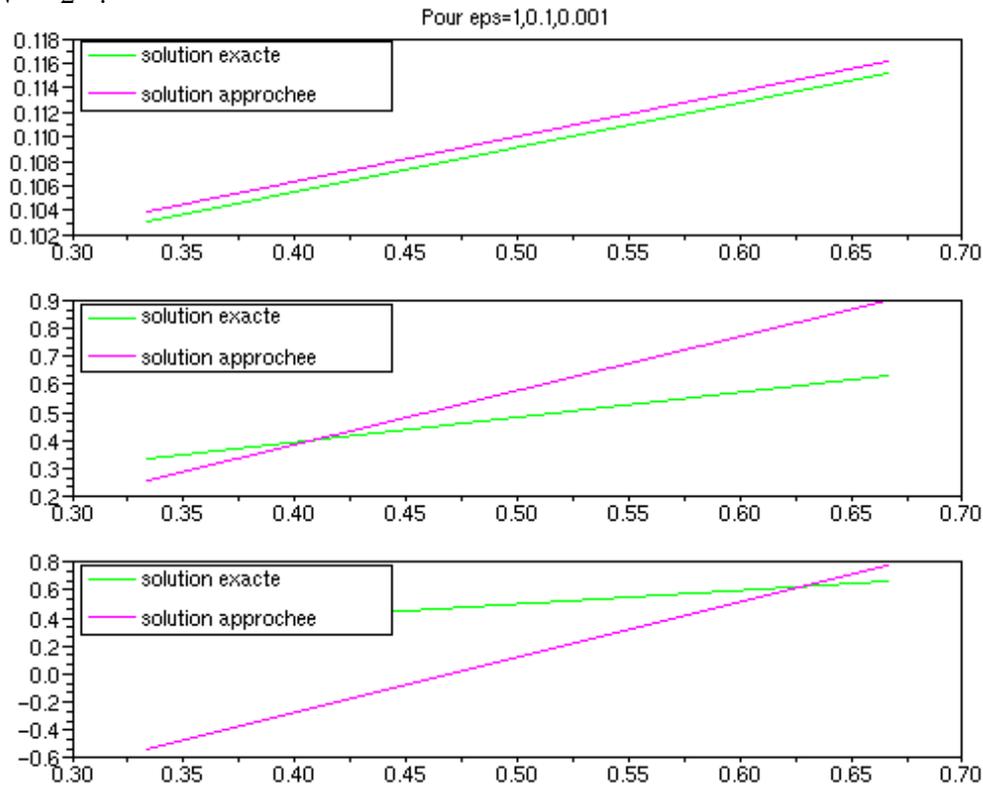
$$\langle b_h x, x \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ \vdots \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, x \right\rangle = (N-2)x$$

Donc si $\langle A_h x, x \rangle > 0$ alors $x > 0 \implies A_h$ est monotone, donc inversible.

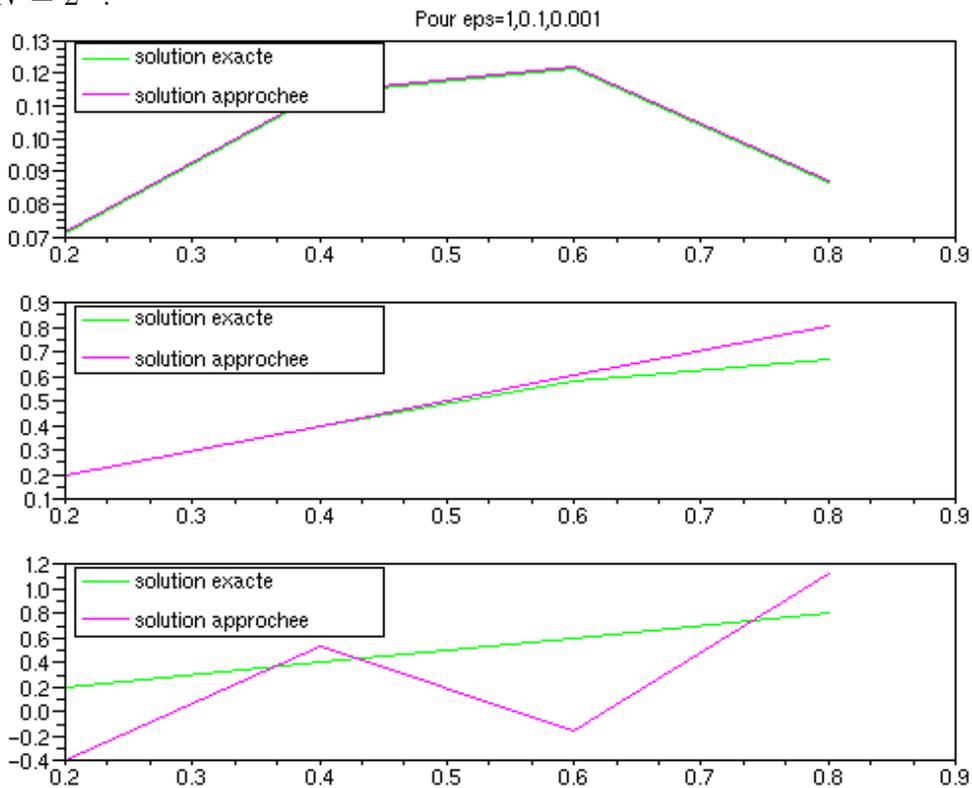
1.7 Exercice 8 (Calcul numérique de la solution approchée, convergence)

Nous avons tracé que le même graphique, la solution exacte et la solution approchée pour différent pas $N = 2^j$ et $j=1, \dots, 8$, et pour différent ε :

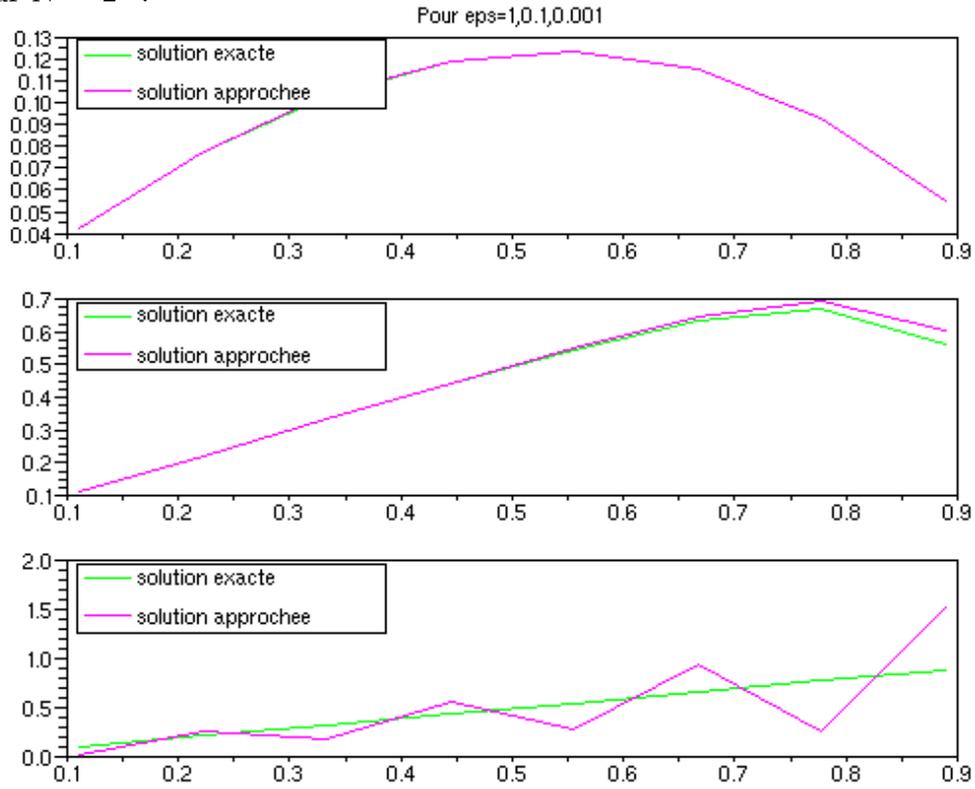
Pour $N = 2^1$:



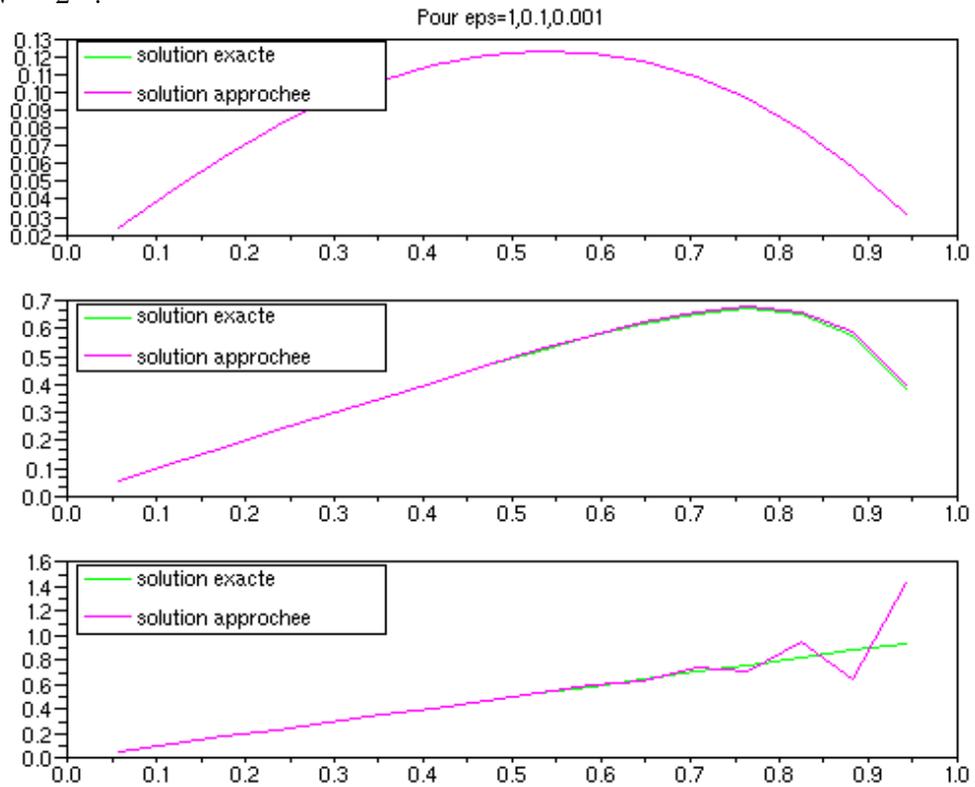
Pour $N = 2^2$:



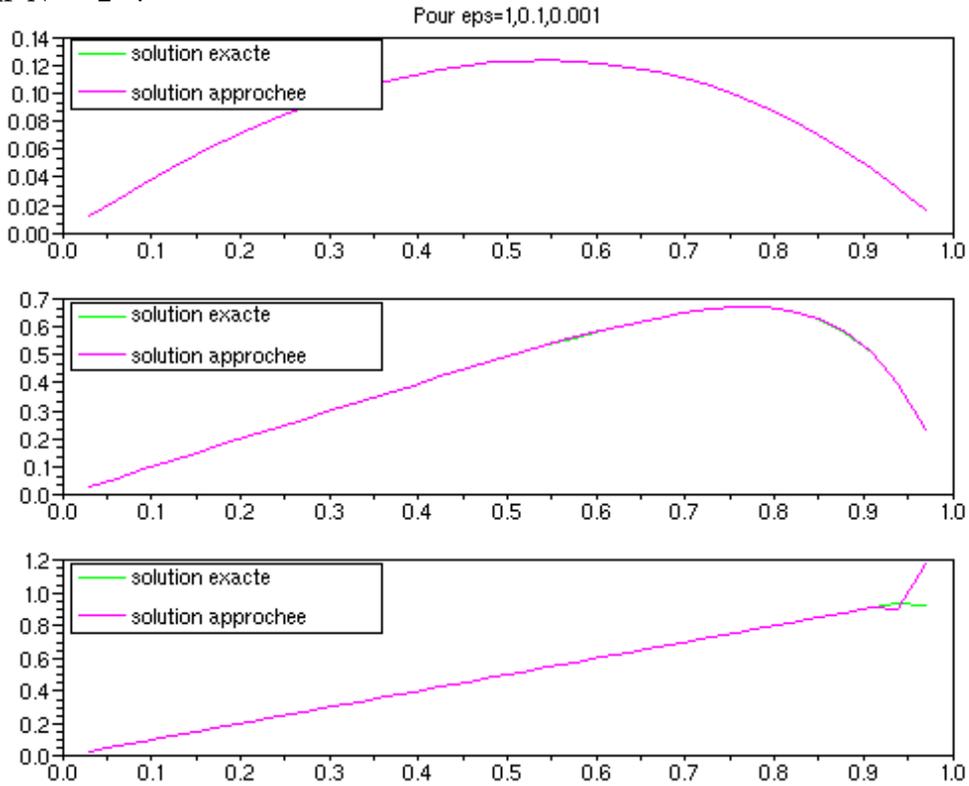
Pour $N = 2^3$:



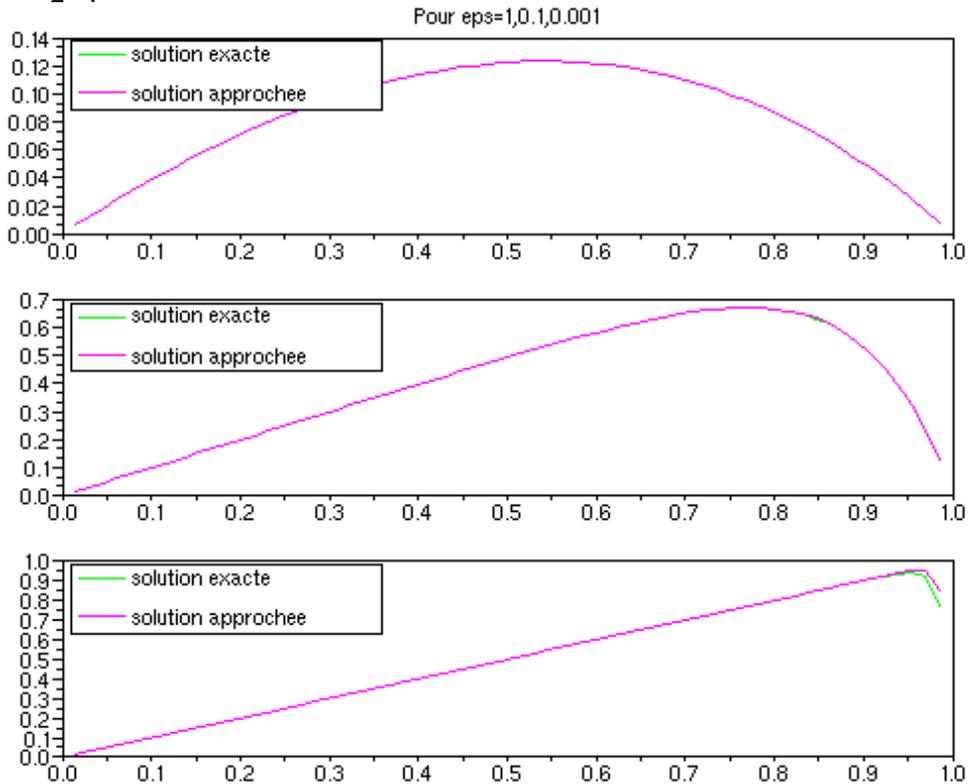
Pour $N = 2^4$:



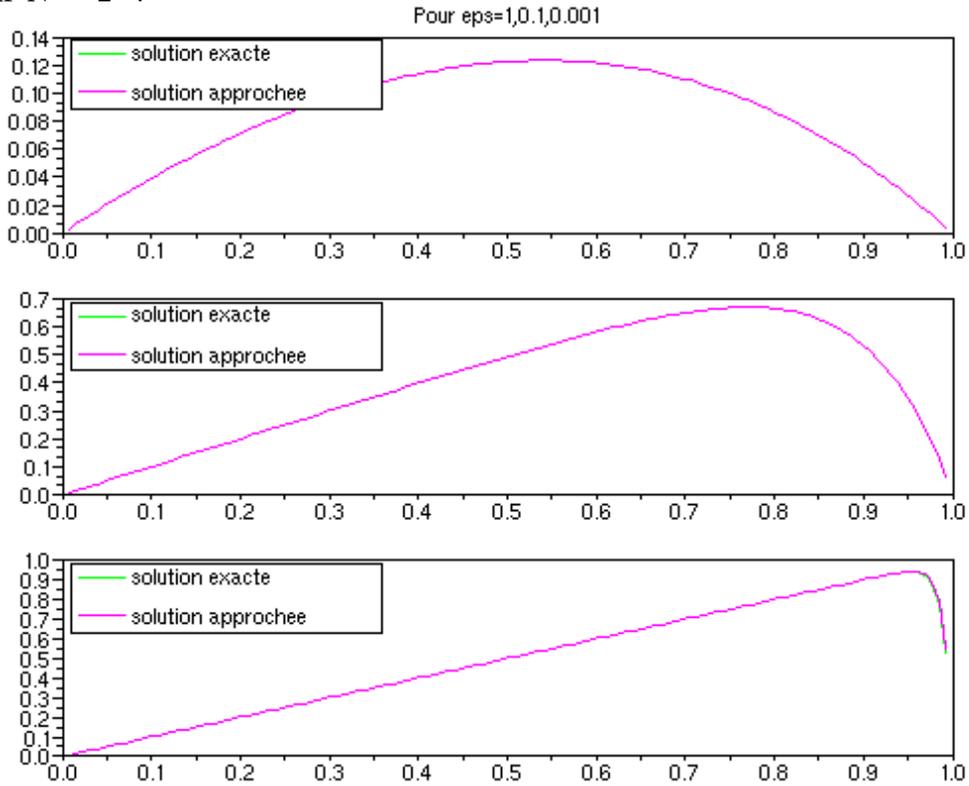
Pour $N = 2^5$:



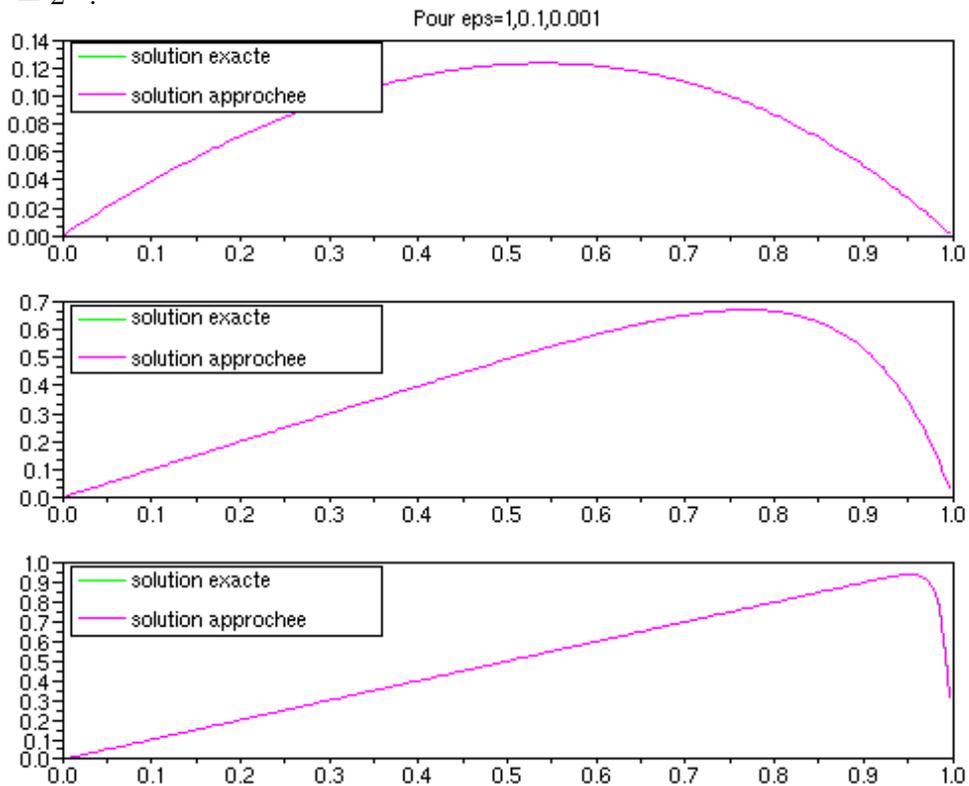
Pour $N = 2^6$:



Pour $N = 2^7$:



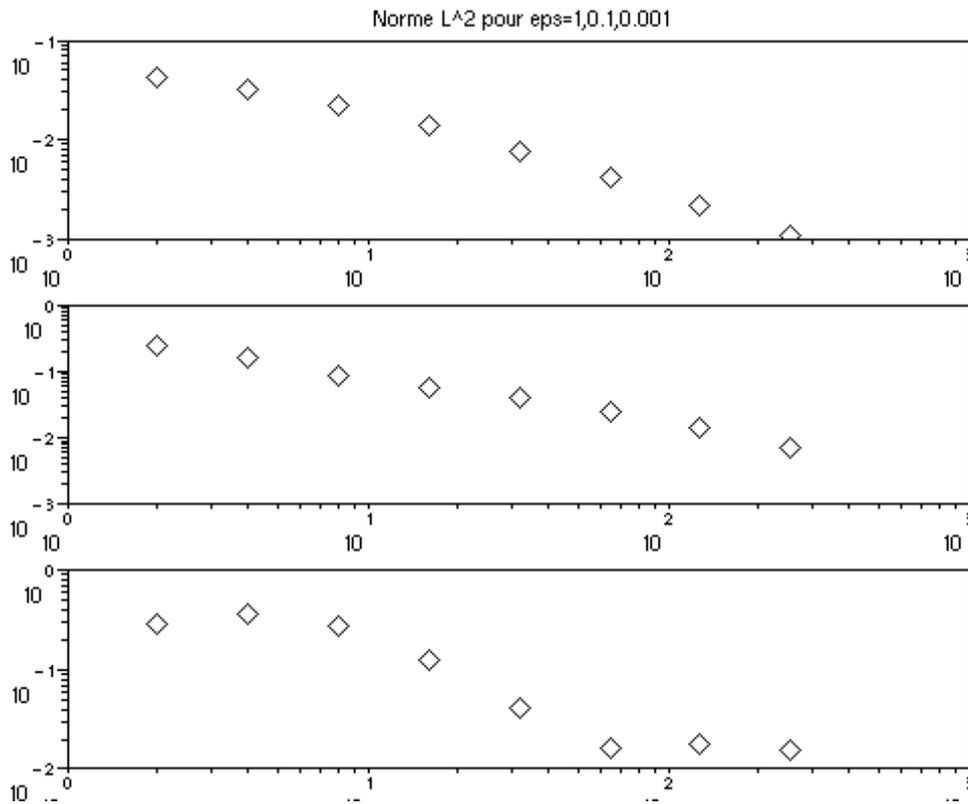
Pour $N = 2^8$:

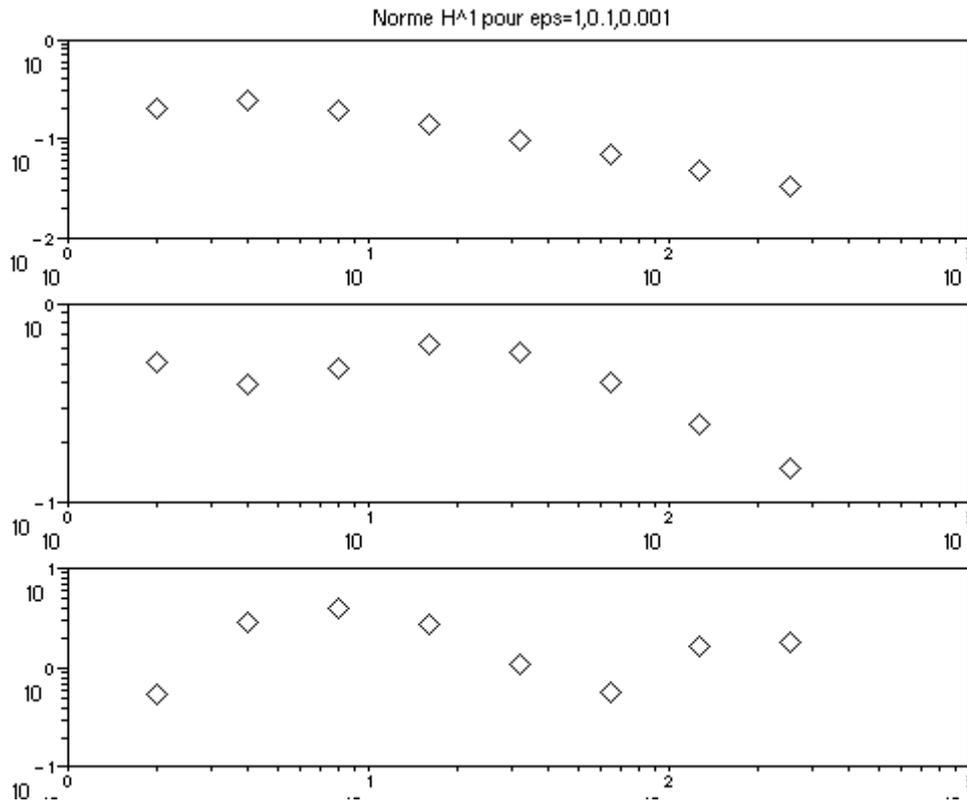


Plus le pas est élevé, et plus la solution approchée est proche de la solution exacte.

Plus ε est petit, et plus on a des oscillations au voisinage de 1. C'est la couche limite en 1 qui provoque ce phénomène.

Ensuite nous avons étudié la convergence de la méthode des éléments finis pour le problème (CD). Pour cela nous avons programmé l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée pour les normes L^2 et H^1 . Puis pour différents $\varepsilon=1, 0.1, 0.01$, nous avons tracé cette erreur les mêmes pas de temps que ceux utilisés précédemment, le tout dans un repère logarithmique.





On calcule ensuite les pentes de chacune des courbes :

| | $\varepsilon = 1$ | $\varepsilon = 0.1$ | $\varepsilon = 0.01$ |
|-------|-------------------|---------------------|----------------------|
| p_0 | 0.86 | 0.72 | Aucune |
| p_1 | 0.5 | 0.65 | Aucune |

On peut donc dire que l'erreur ne varie pas en fonction de ε , ou tout du moins pas de manière significative. On a ainsi les majorations suivantes, en utilisant le résultat du cours :

$$\|u_h - u\|_0 \leq C_1 h^{0.75}, \quad \|u_h - u\|_1 \leq C_2 h^{0.5}$$

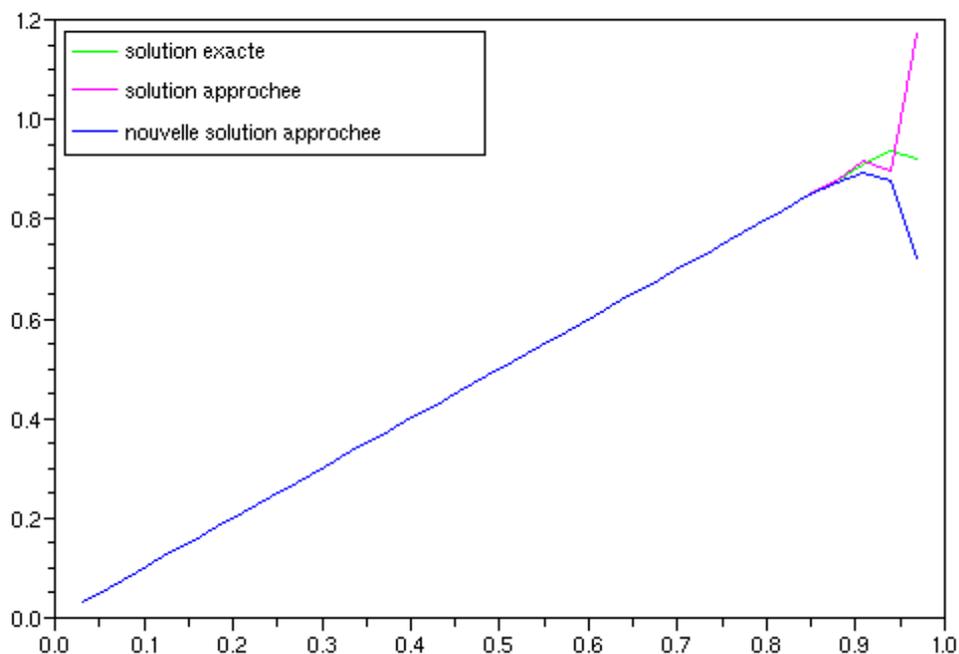
Comme on a une couche limite en 1 qui augmente plus ε devient petit. Et dans cette couche notre approximation oscille et donc n'approche plus du tout la solution exacte. Plus le pas et plus ε sont grands et plus notre solution approchée s'approche de la solution exacte.

1.8 Exercice 9 (Une méthode de "stabilition")

On modifie dans cette partie l'équation de départ (CD) en en renforçant les effets visqueux.

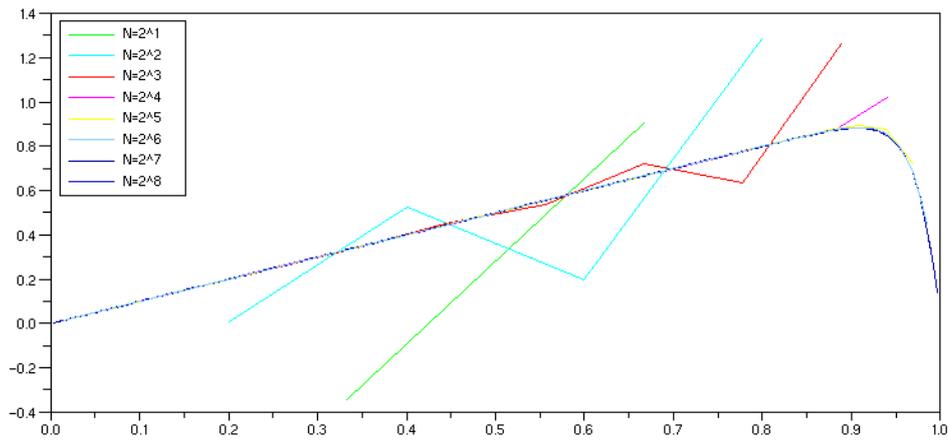
$$(CD_S) \begin{cases} -(\varepsilon + |\lambda|\frac{h}{2})u''(x) + \lambda u'(x) = f(x), \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

où $h = 1/(N + 1)$. On remplace le ε de la question 8 par $\varepsilon + |\lambda|\frac{h}{2}$. Puis on utilise les programmes des questions précédentes pour tracer :



On remarque que la nouvelle solution approchée n'oscille pas pour ε petit, alors que c'était le cas dans la question 8. Elle converge aussi plus rapidement vers 1 que la solution exacte. On a toujours une couche limite en 1, mais on peut l'approcher.

Maintenant on fait varier le pas de la solution approchée. On a :



On constate que plus le pas augmente, et moins la solution approchée oscille. Ce qui était le contraire de l'exercice précédent. On préfère toujours avoir un schéma qui converge en raffinant le maillage, ce qui est maintenant le cas.

1.9 Exercice 10 (Une solution quasi-exacte de (P))

Nous avons calculé le second membre en remplace dans le problème (P), $u(x, t)$ par $e^{-L(t+t_0)(x-x_0)^2}$. On a :

$$f(x, t) = \{-L(x - x_0)^2 - 2\varepsilon L(t + t_0)[\lambda - 2L(x - x_0)^2(t + t_0)] + 2\varepsilon L(t + t_0)\} e^{-L(t+t_0)(x-x_0)^2}$$

On visualise graphiquement la courbe de la solution exacte pour différent t :

